

Методика изучения числовых последовательностей в курсе алгебры основной школы

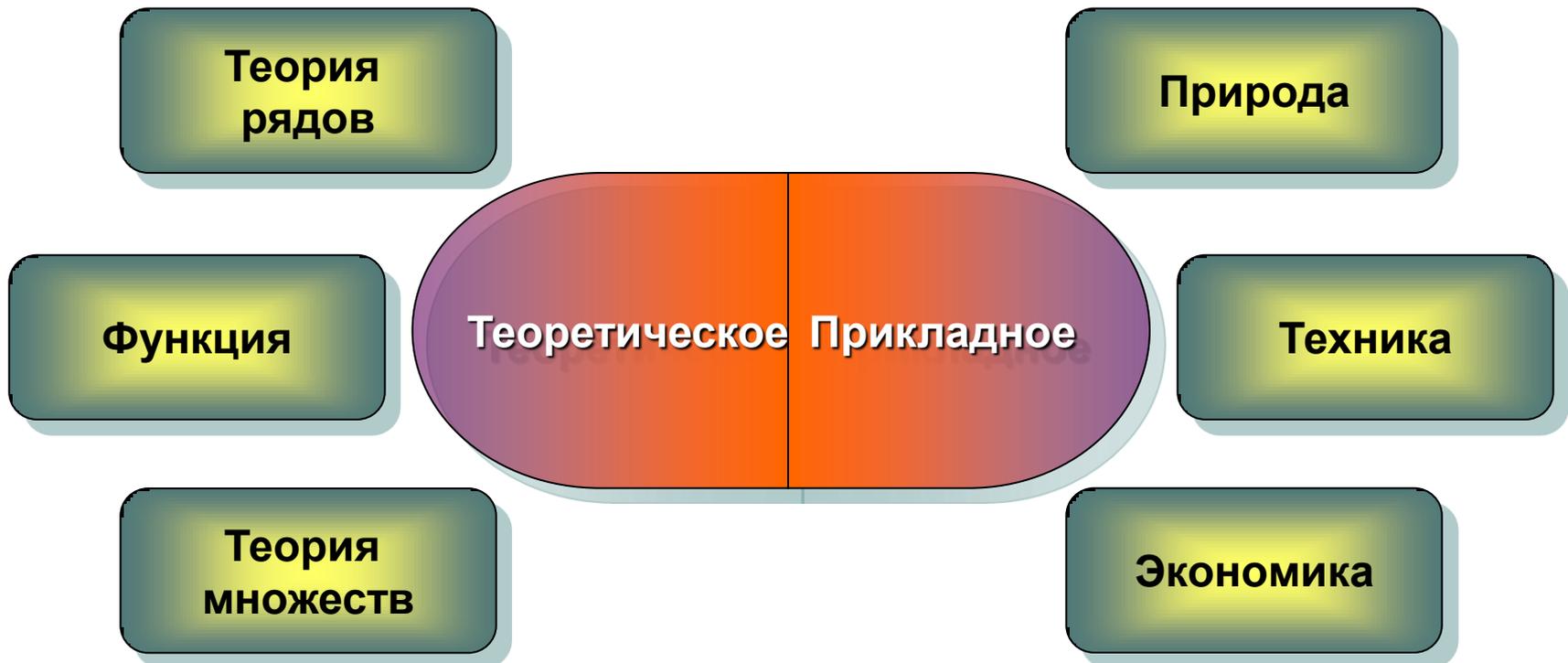
"Сравнение есть основа всякого понимания и всякого мышления, чтобы какой-нибудь предмет был понят ясно, отличайте его от самых сходных с ним предметов и находите сходство с самыми отдельными от него предметами, тогда только вы выясните себе все существенные признаки, а это значит – понять предмет".

К.Д. Ушинский

План

- 1. Значение числовых последовательностей в математике и её школьном курсе**
- 2. Место числовых последовательностей в курсе алгебры основной школы**
- 3. Различные подходы к изложению раздела «Числовые последовательности»**
- 4. Основные этапы формирования понятия «числовая последовательность»**
- 5. Технологическая схема изучения прогрессий и методика её реализации**
- 6. Основные типы учебных задач темы и методика обучения их решению**
- 7. Специальные методы и приемы обучения**
- 8. Возможности использования ЦОР при изучении числовых последовательностей**

Значение числовых последовательностей в математике



Значение числовых последовательностей в школьном курсе математики

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Линия
функций

Линия
чисел и вычислений

Линия
тождественных
преобразований

Линия
уравнений
и неравенств

Линия
основ математического
анализа (предел)

Место числовых последовательностей в школьном курсе математики

I этап (пропедевтический). [Интуитивно-практический уровень, без теоретических обоснований]

• *дошкольное обучение:*

- прямой и обратный счет в пределах 1-го и 2-го десятков;

• *начальная школа:*

-натуральный ряд чисел;

-последовательности четных и нечетных чисел.

• *5-8 кл.:*

-последовательности квадратов и кубов чисел;

-последовательности, получаемые при вычислении приближенных значений величин с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т.д.

Место числовых последовательностей в школьном курсе математики

II этап (основной).

• 9 кл.: Основная цель – знакомство с понятием последовательности, способами её задания, подробное рассмотрение особых последовательностей – прогрессий и их применение к решению задач.

Темы программы:

- числовая последовательность;
- арифметическая прогрессия;
- сумма n первых членов арифметической прогрессии;
- геометрическая прогрессия;
- сумма n первых членов геометрической прогрессии.

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Дополнительные темы программы:

- способы задания числовой последовательности и её свойства;
- числа Фибоначчи;
- предел последовательности;
- бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и её сумма;
- метод математической индукции и его применение к решению задач на последовательности.

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Место числовых последовательностей в школьном курсе математики

III этап (завершающий).

- **10-11 кл.:** организация целостной системы знаний о последовательностях и их применения к решению геометрических, физических, экономических и других прикладных задач.

Темы программы:

- *понятие о пределе последовательности;*
- *существование предела монотонной ограниченной последовательности;*
- *длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей;*
- *бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и её сумма.*

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Дополнительные темы программы:

- **понятие о пределе последовательности;**
- **существование предела монотонной ограниченной последовательности;**
- **теоремы о пределах последовательностей.**

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Различные подходы к изложению раздела «Числовые последовательности»

Алгебраический подход

Устремляет внимание к букве и к операциям над буквой

Функциональный подход

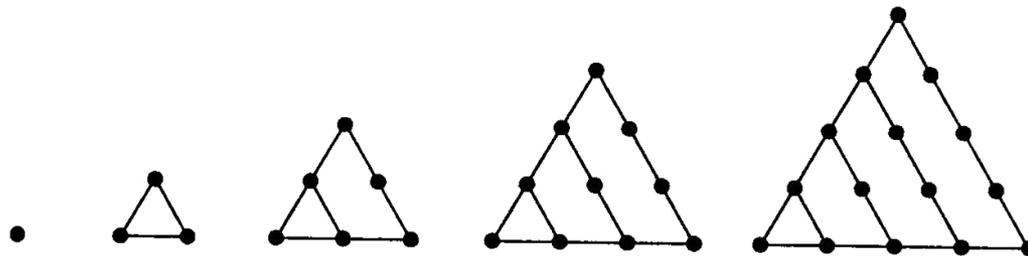
Отправным пунктом является понятие последовательности как функции, заданной на множестве \mathbb{N} – чисел.

ПРОБЛЕМА:
рациональное сочетание
алгебраического и функционального подходов

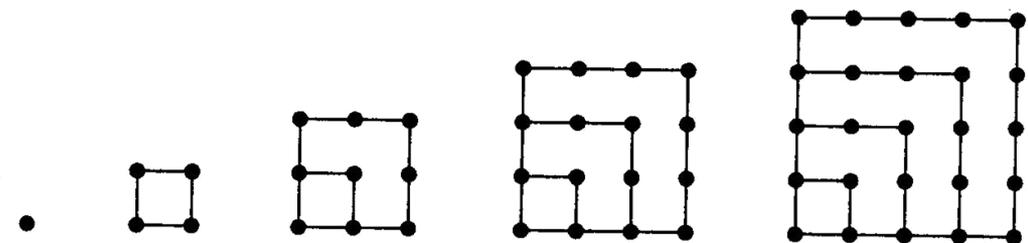
Основные этапы формирования понятия «числовая последовательность»

1. Рассмотрение задач, результатом решения которых являются числовые последовательности.
2. Введение терминологии, связанной с числовой последовательностью.
3. Рассмотрение различных примеров числовых последовательностей.

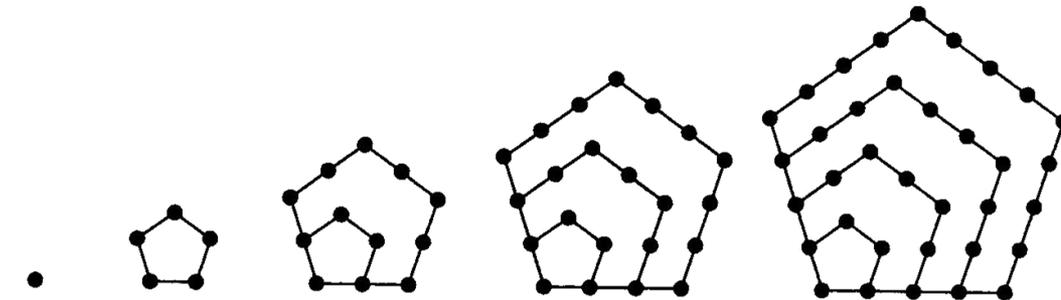
Примеры числовых последовательностей: «геометрические» числа пифагорейцев



1, 3, 6, 10, 15, ...



1, 4, 9, 16, 25, ...



1, 5, 12, 22, 35, ...

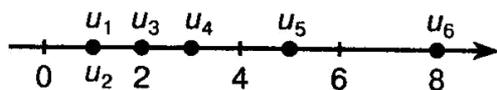
Основные этапы формирования понятия «числовая последовательность»

1. Рассмотрение задач, результатом решения которых являются числовые последовательности.
2. Введение терминологии, связанной с числовой последовательностью.
3. Рассмотрение различных примеров числовых последовательностей.
4. Введение понятий «бесконечной» и «конечной» последовательностей.
5. Знакомство со способами задания числовых последовательностей.
6. Введение понятий возрастающей и убывающей последовательностей; ограниченной и неограниченной последовательностей.

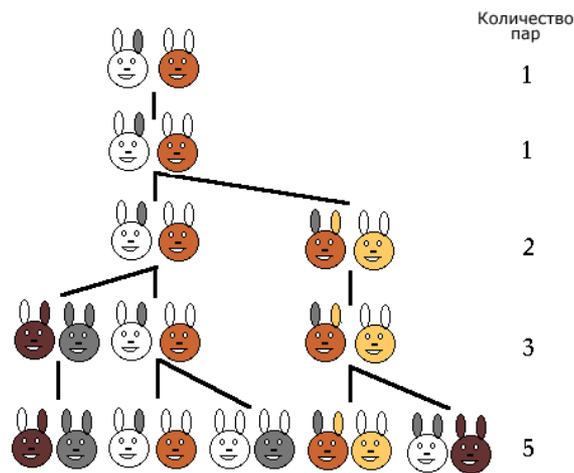
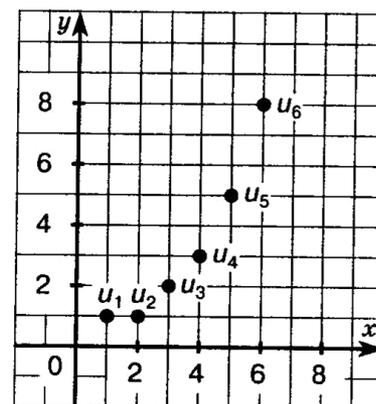
Способы задания числовых последовательностей

- описанием;
- формулой n -го члена;
- рекуррентный способ;
- графический:

а) на числовой прямой;



б) на координатной плоскости.



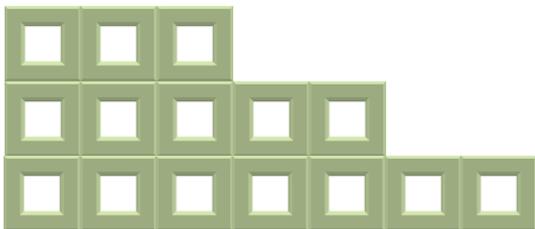
Леонардо Пизанский
(1180-1249 гг.)

Технологическая схема изучения прогрессий и методика её реализации

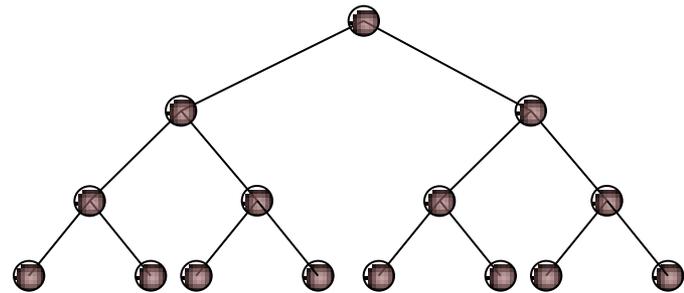
1. Рассмотрение задач, решение которых приводит к построению модели соответствующей прогрессии.
2. Определение прогрессии (учителем или учащимися), фиксирование его формулировки.
3. Выявление характеристических свойств полученной прогрессии.
4. Рассмотрение частных случаев (в зависимости от значений d/q).
5. Исследование характера поведения прогрессии в зависимости от значений d/q .
6. Вывод формулы общего члена прогрессии.
7. Вывод формулы суммы первых n членов прогрессии.
8. Решение учебных и познавательных задач.
9. Обобщение и систематизация знаний о прогрессиях.
10. Контроль знаний, умений и навыков учащихся на предмет соответствия требованиям стандарта.

Рассмотрение задач, подводящих к понятию прогрессии

Рабочий выложил плитку следующим образом: в первом ряду – 3 плитки, во втором – 5 плиток и т.д., увеличивая каждый ряд на 2 плитки. Сколько плиток понадобится для седьмого ряда?

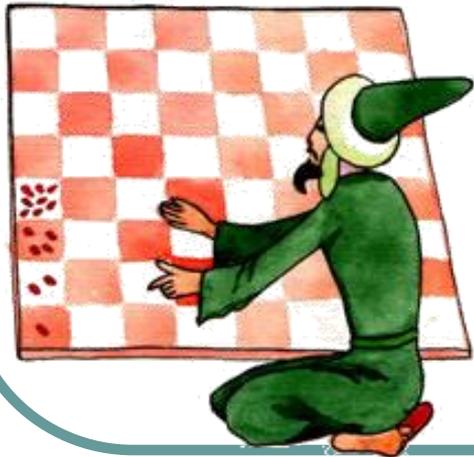
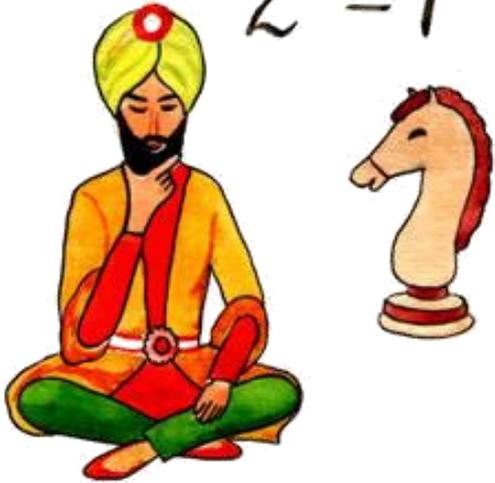


В благоприятных условиях бактерии размножаются так, что на протяжении одной минуты каждая из них делится на две. Сколько бактерий получится из одной через 7 минут?



Рассмотрение задач, подводящих к понятию прогрессии

$$2^{64} - 1$$



$$S_{64} = 18,5 \cdot 10^{18}$$



Определение прогрессии

- **Прогрессия** – в математике: ряд увеличивающихся или уменьшающихся чисел, в котором разность или отношение между соседними числами сохраняет постоянную величину. **Толковый словарь С.И. Ожигова**
- **Прогрессия** (от лат. progression – движение вперед) – последовательность, каждый член которой получается из предыдущего прибавлением постоянного (для данной П.) числа (**Арифметическая П.**) или умножением на постоянное число (**Геометрическая П.**). **Математический энциклопедический словарь**
- **Арифметическая прогрессия** – последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. **Алгебра 9. Ю.Н. Макарычев и др.**

Выявление характеристических свойств прогрессии

$$a_n - a_{n-1} = d \quad a_{n+1} - a_n = d$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является **средним арифметическим его предыдущего и последующего членов**

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является **средним геометрическим его предыдущего и последующего членов**

Исследование характера поведения прогрессии

Если: $d > 0$ – возрастает;
 $d < 0$ – убывает.

Если: $q > 1$ – возрастает;
 $0 < q < 1$ – убывает;

$q < -1$ – знакочередующиеся значения, возрастающие по модулю;

$-1 < q < 0$ – знакочередующиеся значения, убывающие по модулю;

$q = 1$ – все члены одинаковые;

$q = -1$ – знакочередующиеся равные по модулю значения.

Вывод формулы общего члена прогрессии

- методом математической индукции (Виленкин, Теляковский)
- с опорой на определение:

$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$b_n : b_{n-1} = q$$

$$\begin{array}{l} + \left. \begin{array}{l} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1} - a_{n-2} = d \\ a_n - a_{n-1} = d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{всего} \\ n-1 \text{ строк} \end{array} \\ \hline a_n - a_1 = d(n-1) \end{array}$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$\begin{array}{l} \times \left. \begin{array}{l} b_2 : b_1 = q \\ b_3 : b_2 = q \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-1} : b_{n-2} = q \\ b_n : b_{n-1} = q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{всего} \\ n-1 \text{ строк} \end{array} \\ \hline b_n : b_1 = q^{n-1} \end{array}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Основными типами учебных задач этой темы являются:

- задачи на применение определения;
- задачи на применение формулы n -го члена;
- задачи на применение формулы суммы первых n членов прогрессии;
- задачи на применение характеристического свойства прогрессии.

Учителю следует включить текстовые задачи следующего вида:

- задачи с геометрическим, физическим, экономическим содержанием, требующие построения модели, выражающей прогрессию;
- применение прогрессий при рассмотрении некоторых вопросов математики, например:
 - 1) при обращении периодической дроби в обыкновенную;
 - 2) при получении формулы сложных процентов;
 - 3) при нахождении площадей фигур и объемов тел и др.

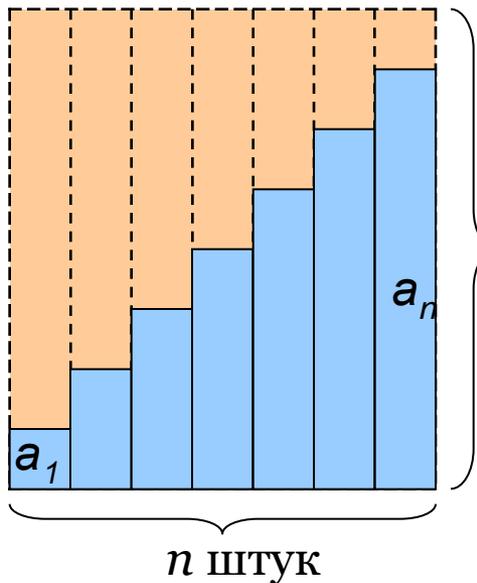
Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Прием решения задачи на применение характеристического свойства прогрессии:

- 1) Изучите особенности данных задачи.
- 2) Установите, какое из характеристических свойств нужно использовать, чтобы ответить на вопрос задачи:
 - а) каждый член арифметической прогрессии (кроме первого) есть среднее арифметическое его предшествующего и последующего члена;
 - б) каждый член геометрической прогрессии (кроме первого) есть среднее геометрическое его предшествующего и последующего члена.
- 3) Примените выбранное свойство, используя соответствующие преобразования.
- 4) Сделайте вывод, исходя из условий задачи. Запишите ответ.

Специальные методы и приемы обучения

- задание последовательностей различными способами;
- геометрическая иллюстрация формул;



$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

- логически осмысленное запоминание и припоминание.

Возможности использования ЦОР при изучении числовых последовательностей

Демонстрация
 Решить задачу

Дано:
 Высота саженца
 $N_0 = 61$ см
 Прирост (в месяц)
 $d = 6$ см
 Через время
 $t = 14$ мес.

Найти:
 Высоту растения
 Высоту саженца

Решение:
 i -й член арифметической прогрессии
 $N = N_0 + d \cdot t$
 $N = 145$ см

Демонстрация
 Решить задачу

Дано:
 Начальный взнос
 $N_0 = 67$ руб.
 Ставка (в месяц)
 $d = 6$ %
 Через время
 $t = 14$ мес.

Найти:
 Размер вклада
 Начальный взнос

Решение:
 i -й член геометрической прогрессии
 $N = N_0 \cdot d^{i-1}$
 $N = 151.5$ руб.

Показать парадокс
 Убрать парадокс

Начальные условия:
 Скорость Ахиллеса
 $V = 70$ см/с
 Скорость черепахи
 $U = 1$ см/с
 Расстояние между Ахиллесом и черепахой
 $S_0 = 500$ см

Парадоксальный забег:
 1 шаг
 $dt_1 = \frac{S_0}{V} = 7.1429$ с
 $S_1 = dt_1 \cdot U = \frac{S_0 \cdot U}{V} = 7.1429$ см